



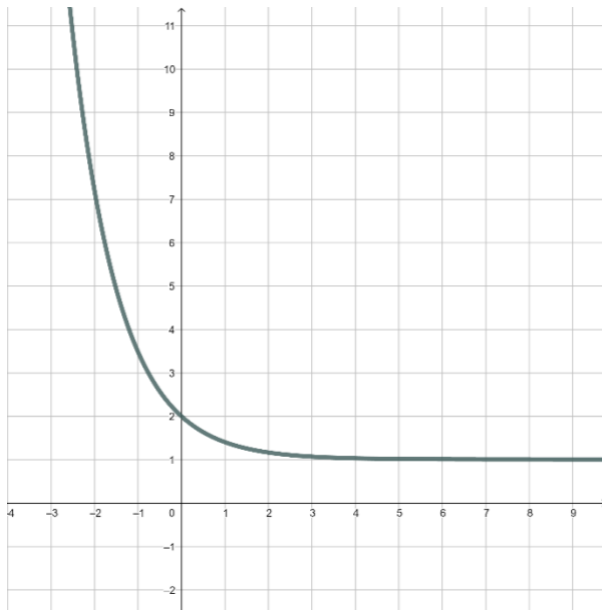
Варіант 1

Початковий рівень

1. Дано функцію  $f(x) = 0,4^x + 1$ , побудуйте її графік та знайдіть:

- 1) Область визначення функції (1 б)
- 2) Проміжки зростання або спадання функції (1 б)
- 3) Область значень функції (1 б)

Розв'язок:



- 1) Область визначення функції:  
 $D(f) = R$ ;
- 2) Проміжки зростання або спадання функції: функція ( $f$ ) спадає на всій області визначення ( $R$ );
- 3) Область значень:  $E(f) = (1; +\infty)$ ;

Середній рівень

2. (3 б) Розв'яжіть рівняння і нерівність:

- 1)  $4^{x+3} + 4^x = 260$
- 2)  $\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 3$
- 3)  $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 5) > -1$

Розв'язок:

1)  $4^{x+3} + 4^x = 260$

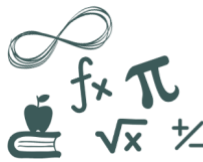
$$4^{x+3} + 4^x = 4^4 + 4 \quad (\text{Так як } 260 = 4^4 + 4)$$

$$4^x(4^3 + 1) = 4(4^3 + 1)$$

$$4^x = 4^1$$

$$x = 1$$

Відповідь: 1;



2)  $\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 3$

Нехай  $\log_3 x = t$ :

$$t^2 - 2t = 3$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

За теоремою Вієта  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \\ \log_3 x = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 3 \\ \log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 27 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Відповідь: 27;  $\frac{1}{3}$

3)  $\log_{\frac{1}{4}}(2x - 5) > -1$

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x - 5) > \log_{\frac{1}{4}} 4$$

$$\begin{cases} 2x - 5 < 4 \\ 2x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 9 \\ 2x > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{9}{2} \\ x > \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow 2,5 < x < 4,5$$

Відповідь: (2,5; 4,5)

Достатній рівень

3. (1,5 б) Знайдіть область визначення функції

$$f(x) = 7\sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3}$$

Розв'язок:

$$f(x) = 7\sqrt{\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3}$$

Так як підкореневий вираз парного степеня існує лише для значень більших або рівних нулю, то:

$$\log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 \geq 0$$

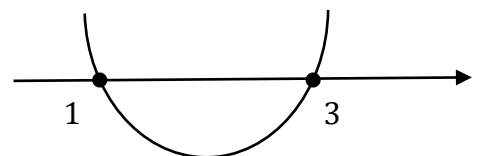
Нехай  $\log_2 x = t$ :

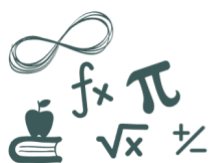
$$t^2 - 4t + 3 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 4t + 3$$

1. ОДЗ:  $t \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції  $f(t)$ :  $t^2 - 4t + 3 = 0$





За теоремою Вієта  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

Так як знак нерівності « $\geq$ », оберемо проміжок  $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$

$$\log_2 x = t \left| \begin{array}{l} t \leq 1 \\ t \geq 3 \end{array} \right. \Rightarrow \log_2 x \leq 1 \left| \begin{array}{l} \log_2 x \geq 3 \end{array} \right. \Rightarrow \log_2 x \leq \log_2 2 \left| \begin{array}{l} \log_2 x \geq \log_2 8 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 8 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь:  $(0; 2] \cup [8; +\infty)$

**4. (1,5 б) Розв'яжіть рівняння:**

$$\log_5 x^2 - \log_x 5 = 1$$

$$\log_5 x^2 - \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему про перехід} \\ \text{від однієї основи логарифма до іншої} \end{array} \right)$$

$$2 \log_5 x - \frac{1}{\log_5 x} - 1 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему про} \\ \text{логарифм степеня} \end{array} \right)$$

$$2 \log_5^2 x - 1 - \log_5 x = 0 \quad (\text{Помножили на } \log_5 x)$$

$$2 \log_5^2 x - \log_5 x - 1 = 0$$

Нехай  $\log_5 x = t$ :

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9 = 3^2$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5 x = t \left| \begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \log_5 x = 1 \left| \begin{array}{l} \log_5 x = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 5^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Відповідь:  $5; 5^{-\frac{1}{2}}$



5. (3 б) Знайдіть найменший цілий додатний розв'язок нерівності:

$$\frac{(5\sqrt{5})^x - \frac{1}{5}}{x - 4} > 0$$

Розв'язок:

1. ОДЗ:  $x - 4 \neq 0$   
 $x \neq 4$

2. Нулі функції  $f(x)$ :  $\frac{(5\sqrt{5})^x - \frac{1}{5}}{x - 4} = 0$

$$(5\sqrt{5})^x - \frac{1}{5} = 0$$

$$\left(5 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^x - 5^{-1} = 0$$

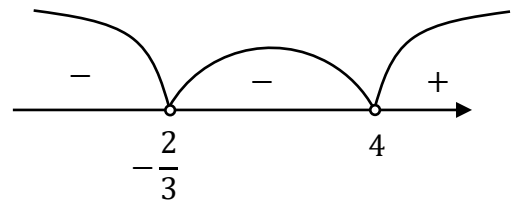
$$\left(5^{\frac{3}{2}}\right)^x - 5^{-1} = 0$$

$$5^{1,5x} = 5^{-1}$$

$$1,5x = -1$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

\*Врахуємо знак нерівності «>» та ОДЗ, розв'язком буде проміжок  $(4; +\infty)$



Відповідь: найменший цілий додатний розв'язок нерівності: 5.



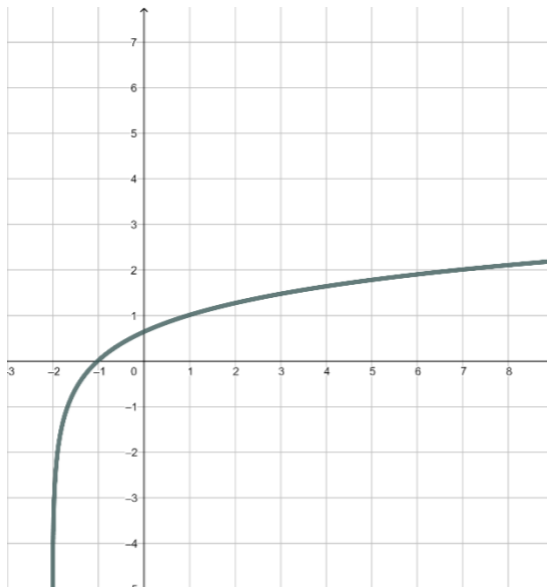
Варіант 2

Початковий рівень

1. Дано функцію  $f(x) = \log_3(x + 2)$ , побудуйте її графік та знайдіть:

- 1) Область визначення функції (1 б)
- 2) Проміжки зростання або спадання функції (1 б)
- 3) Область значень функції (1 б)

Розв'язок:



- 1) Область визначення функції:  
 $D(f) = (-2; +\infty)$ ;
- 2) Проміжки зростання або спадання функції: функція ( $f$ ) зростає на всій області визначення  $(-2; +\infty)$ ;
- 3) Область значень:  $E(f) = \mathbb{R}$ ;

Середній рівень

2. (3 б) Розв'яжіть рівняння і нерівність:

- 1)  $5^{x+2} - 5^x = 120$
- 2)  $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(2x - 9) = 2$
- 3)  $7^{2-3x} < \frac{1}{49}$

Розв'язок:

1)  $5^{x+2} - 5^x = 120$

$$5^{x+2} - 5^x = 5^3 - 5$$

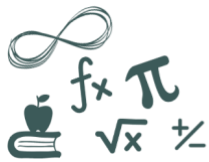
$$5^x(5^2 - 1) = 5(5^2 - 1)$$

$$5^x = 5^1$$

$$x = 1$$

2)  $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(2x - 9) = 2$

$$\log_4 \frac{x^2 - 9}{2x - 9} = 2 \quad (\text{За теоремою про логарифм частки})$$



# Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

## ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

Контрольна робота



$$\frac{x^2 - 9}{2x - 9} = 16 \quad (\text{За означенням логарифма})$$

$$x^2 - 9 = 16(2x - 9)$$

$$x^2 - 9 = 32x - 144$$

$$x^2 - 32x + 135 = 0$$

$$D = 1024 - 540 = 484 = 22^2$$

$$x_{1,2} = \frac{32 \pm 22}{2} = \begin{cases} x_1 = 27 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Відповідь: 27; 5

$$3) 7^{2-3x} < \frac{1}{49}$$

$$7^{2-3x} < 7^{-2}$$

$$2 - 3x < -2$$

$$3x > 4$$

$$x > \frac{4}{3}$$

Відповідь:  $(1\frac{1}{3}; +\infty)$

Достатній рівень

### 3. (1,5 б) Знайдіть область визначення функції

$$f(x) = 5\sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x - 2}$$

Розв'язок:

$$f(x) = 5\sqrt{\log_3^2 x - \log_3 x - 2}$$

Так як підкореневий вираз парного степеня існує лише для значень більших або рівних нулю, то:

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 2 \geq 0$$

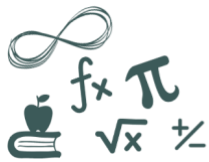
Нехай  $\log_3 x = t$ :

$$t^2 - t - 2 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - t - 2$$

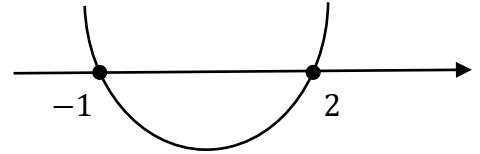
1. ОДЗ:  $t \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції:  $f(t): t^2 - t - 2 = 0$



За теоремою Вієта  $\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

Так як знак нерівності « $\geq$ », оберемо проміжок  $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$



$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} t \leq -1 \\ t \geq 2 \\ \log_3 x = t \end{array} \right| &\Rightarrow \begin{array}{l} \log_3 x \leq -1 \\ \log_3 x \geq 2 \end{array} \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} \log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{3} \\ \log_3 x \geq \log_3 9 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 9 \\ x > 0 \end{array} \end{aligned}$$

Відповідь:  $(0; \frac{1}{3}] \cup [9; +\infty)$

**4. (1,5 б) Розв'яжіть рівняння:**

$$\log_2 x^4 = \log_{0,25} x + \log_3 3\sqrt{3}$$

$$\log_2 x^4 = \log_{2^{-2}} x + \log_3 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$4 \log_2 x = -\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{3}{2} \log_3 3 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Використали теорему про} \\ \text{логарифм степеня та скористалися} \\ \text{властивостями степеня} \\ \text{з дійсним показником} \end{array} \right)$$

$$4 \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{Так як } \log_3 3 = 1)$$

Нехай  $\log_2 x = t$ :

$$4t + \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} = 0$$

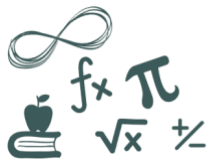
$$8t + t - 3 = 0 \quad (\cdot 2)$$

$$9t = 3$$

$$t = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\log_2 x = t \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{3}}$$

Відповідь:  $2^{\frac{1}{3}}$



5. (3 б) Знайдіть найбільший цілий додатний розв'язок нерівності:

$$\frac{(6\sqrt{6})^x - 36}{x - 5} < 0$$

Розв'язок:

1. ОДЗ:  $x - 5 \neq 0$   
 $x \neq 5$

2. Нулі функції  $f(x)$ :  $\frac{(6\sqrt{6})^x - 36}{x - 5} = 0$

$$(6\sqrt{6})^x - 36 = 0$$

$$\left(6 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right)^x - 6^2 = 0$$

$$\left(6^{\frac{3}{2}}\right)^x = 6^2$$

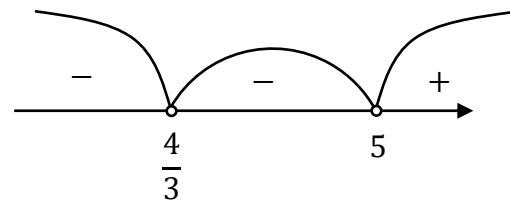
$$6^{1,5x} = 6^2$$

$$1,5x = 2$$

$$x = \frac{4}{3}$$

\*Врахуємо знак нерівності «<» та ОДЗ, розв'язком буде проміжок

$$\left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 5\right)$$



Відповідь: найбільший цілий додатний розв'язок: 4